

非可換性はどこからくるのか

西郷 甲矢人 (長浜バイオ大学)

本稿のタイトルは、もちろん変である。非可換性というのは操作の順序を変えると結果が異なることがあるということであるが、この世はそんな事態に満ち溢れているわけで、むしろ「可換性はどこからくるのか」、つまりどのような条件のもとで「順序を変えても結果が異なる」というような事態が生じるのか、と問うべきである。

ところが物理学の歴史において、この「非可換性」が物理現象の根本において果たす役割が見えてきたのはようやく20世紀初頭の量子論においてであった。古典論においては、物理量どうしの積は「当たり前」に可換、すなわち $AB = BA$ が成り立つのであった。ところが原子レベル以下の（古典論から見ると）「不思議」な現象を取り扱うにあたっては物理量たちは「非可換な代数」をなすものとして見るべきであることがわかった。物理系とその環境系との関係を定めると、物理量に対する期待値を定める統計的法則としての「状態」が定まるが、こうした法則性を数理的にモデル化するためには（コルモゴロフ流の）測度論的な確率空間の概念では足りず、「代数と状態のペア」である「非可換確率空間」が必要となることが理解されてくることになった（とはいえ現在も多く物理学者が「非可換確率空間」の概念を意識しているとはいえませんが、少なくとも数理的には量子論は測度論的確率論の枠をはみ出す「非可換確率論」の上に成り立っていると言える）。

数学者としての私の専門はまさにこの「非可換確率論」であり、数理物理的な立場からも色々考えつつ楽しみながら研究を続けてきた。当然ながらドレスト光子研究をその嚆矢とする「オフシェル科学」を考える上でも役に立つだろうという確信があり、その立場から非可換確率論や量子ウォークを用いたドレスト光子の理解を試みてきた。その過程で、「非可換性」と「オフシェル性」とがどのように関連しているのかと何度も「わかりそうでわからない」という経験をしてきた。そして昨年、ついに「わかった！」と思えたので、これについて直感的に説明してみたい。ドレスト光子現象を理解するには、相互作用する量子場を理解する必要がある。ところがこれは従来の数理的な枠組みからは理解することが困難であることが知られている。そこで従来の枠組みを超える上で、量子場とは何かを根底から考え直す必要があると思われた。直感的に言えば、量子場というのは「時空」の上に様々な量が生息しており、時空領域ごとに非可換な代数が定まっているようなものであると考えられる。ところで、この「非可換性」はどこから来たのであろうか。

それを解く鍵は（私の考えでは）「時空」とは何か問い直すことで見つかる。時空は従来「事象」の集合と考えられ、そこに様々な構造が付随するものとして考えられてきた。このような時空概念、より一般には（数学における）空間概念は、数学的に言えば、「その空間の上の関数たちのなす可換な代数」を研究することと「同じ」（この「同じさ」は圏論的に述べられる）であることがよく知られている。そこでこうした概念を一般化しようと思う多くの試みが行われた。それらの様々な試みのエッセンスを改めて考えてみると、それは時空を「単なる点の（構造付きの）集合」としてではなく、何かもっと豊かなものとしてとらえなおそうというのである。一言でいうと、「点」ではなくそれらをつなぎ合わせる「矢印」のようなものたちからなるシステムとして捉えると（点は「矢印」の特殊例と思える）、非可換性が現れてくるのである。数学的に言えば、これは時空を「集合」としてではなく「圏」という「合成可能な矢印たちのなすシステム」として捉え直すということである。

この「圏」の構造を反映した演算である「たたみ込み」を積とする代数を「圏代数」と呼ぶが、こ

れは一般に非可換となる。というよりも、異なる対象（「点」的なもの）の間に一本でも射（「矢印」的なもの）があれば非可換となる（たとえ「スカラー」が複素数のように可換であってさえ！）。「時空は単なる点の集まりではなく、むしろその間の多様な関係性の総体である」と「自然言語」で述べればむしろ陳腐でさえあるように見えるが、それを「真正面から」数理的にモデルかしよとすれば圏や圏代数が自然に現れてくることになる。特に「†-圏」と呼ばれる（群や亜群の良い一般化であると同時に、「可逆でない射」を許容したもので、様々な大切な例がある）圏の圏代数は*-代数と呼ばれるものとなり、非可換確率空間のベースとなる。

このように考えてくると、ハイゼンベルグはまさに圏代数（の特別な場合）の構造の一端を物理的直観に導かれて捕まえたのであるし、ボルンによってそれが行列代数という「代数系」によって理解出来ることを見抜かれたのだということが見えてくる。実に、圏代数は行列代数の一般化なのである。どのような意味で一般化かといえば、それは「二つの対象」の間にたくさんの射があってよく、かつ非自明なループが多数あっても良いということである。このような多重性やループの存在は、ドレスト光子の解析においてどうしても重要であるらしいことが近年量子ウォーク等のモデル化をも含めてますます明らかになってきているものでもある。どうやら、オフシエル性とは「点の集まりには還元できないような」時空の「矢印」的な側面そのものであって、まさにそれが非可換性の源なのではないかという気がしてくる。

実はこの直感意外に的外れではないかもしれない。これについてより詳しく述べるにはもう少し準備が必要である。数ヶ月後の「オフシエル科学フォーラム」にご期待ください。

参考文献

- [1] M. Ohtsu: *Dressed Photons* (Springer, Berlin Heidelberg 2014)
- [2] 小嶋泉：量子場とミクロ・マクロ双対性 (丸善出版, 東京 2013)
- [3] Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, *13* 7, 1172.
<https://doi.org/10.3390/sym13071172>
- [4] Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, *13* 9, 1727.
<https://doi.org/10.3390/sym13091727>